



Datenbanksysteme

Wintersemester 2015/16

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Michel
TU Kaiserslautern

smichel@cs.uni-kl.de

Ähnlichkeitssuche in hohen Dimensionen

Mehrdimensionale Indexstrukturen

Bislang im B-Baum gesehen: Eindimensionale Schlüssel.

In vielen Anwendungen ist die Anzahl der Dimensionen höher, was tun?

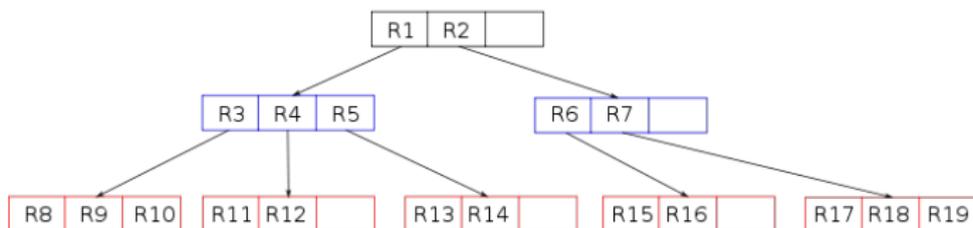
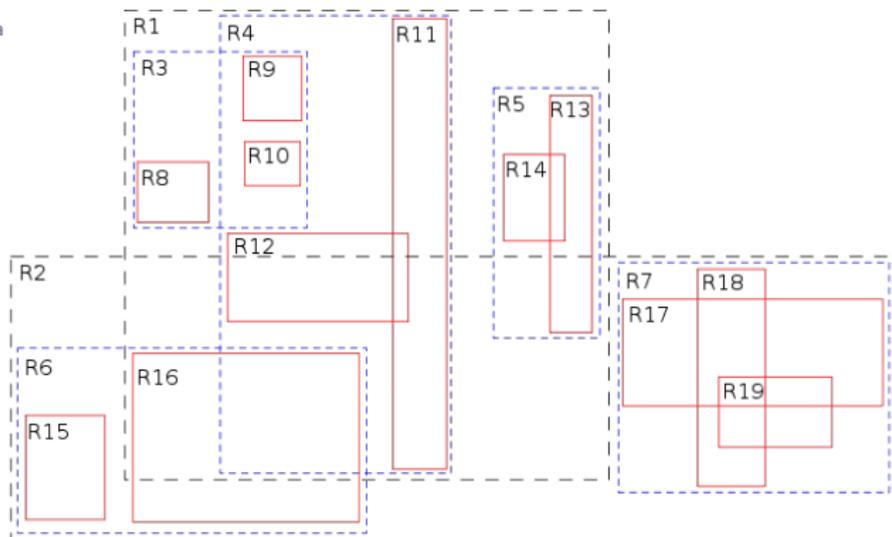
R Baum

- R steht für Rechteck/Rectangle
- Knoten definieren minimale Rechtecke, die die enthaltenen Rechtecke umschließen
- Balanciert. Aufbau (Algorithmus) ähnlich zum B+ Baum
- Überlappung der MBRs (=Minimum Bounding Rectangles)
- Überlappung führt zu Ineffizienz während der Anfrage.

Wir werden uns den R Baum noch im Detail anschauen.

R Baum: Beispiel

Quelle: wikipedia



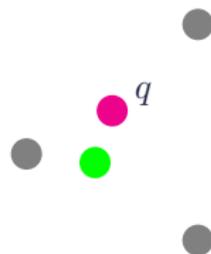
K-Nächste-Nachbarn-Suche (K-Nearest-Neighbor Search)

Objekte werden charakterisiert anhand Menge von relevanten Attributen (Features), z.B. **Punkte in einem d-dimensionalen Raum**.

Z.B. Städte und ihre X-Y-Positionen im 2-dimensionalen Raum.

K-Nearest Neighbor (KNN) Anfragen

- Für ein Anfrage-Objekt q aus einem d -dimensionalen Raum: **Finde den Punkt, der am nächsten an q liegt, für eine gegebene Distanzfunktion**
- **K-Nearest Neighbor Search: Suche die K nächsten Nachbar-Punkte**



Der Fluch der Dimensionalität

(Englisch: **Curse of Dimensionality**)

- **Mit wachsender Dimensionalität wird es zunehmend schwieriger den Raum geeignet zu indexieren.**
- Beispiel: Betrachten Rechteck (2d) mit Kantenlänge 1.
 - Kleines Rechteck mit Kantenlänge 0,1 beschreibt 1% des großen Rechtecks
 - Um 1% eines Würfels (3d) mit gleicher Kantenlänge 1 zu beschreiben braucht der Kleine eine Kantenlänge von 0,21!
 - In 100 Dimensionen: Kantenlänge von 0,954 erforderlich!
- **Abstand zwischen nächstem Objekt und maximal entfernten Objekt nähert sich an.**

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{min}} \rightarrow 0$$

Ab einer bestimmten Anzahl von Dimensionen ist der R Baum ineffektiv.

Wirklich hohe Dimensionen

Ähnlichkeitssuche (Similarity Search) in Foto-Kollektion

- **Gegeben: Ein Foto**
- **Gesucht: Die k ähnlichsten Fotos der Kollektion.**

Beispiel:

Anfrageobjekt



Treffer



- Eigenschaften (Features) werden aus den Fotos extrahiert.
- Z.B: Farbverteilung, Kanten, (MPEG-7 Features)
- **Anzahl der Features wird sehr schnell sehr groß: $\gg 10$**

Locality Sensitive Hashing (LSH)

Locality Sensitive Hashing (LSH) ist eine approximative Methode, die es erlaubt in sehr hohen Dimensionen KNN Anfragen zu bearbeiten.

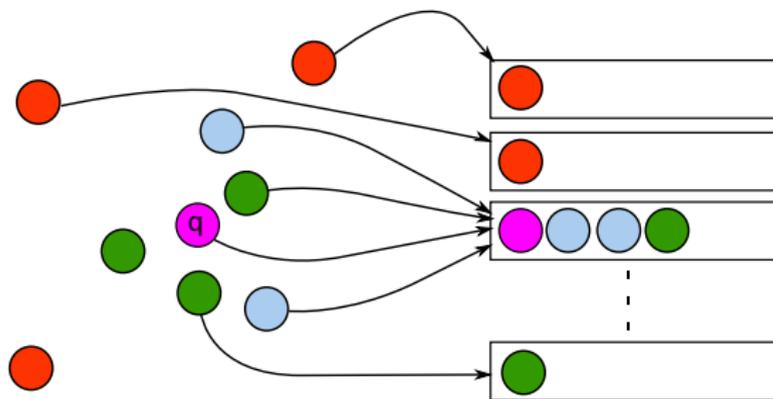
Erinnern Sie sich an Hash-Verfahren:

- Hash-Funktion h platziert Objekte (Tupel) in Hash-Buckets.
- Z.B. basierend auf Schlüssel des Objekts (wie MatrNr für Relation Studenten).
- Schneller Zugriff: Suche nach Objekt x ? Schauge in Bucket $h(x)$ nach.
- Wichtig dabei, Kollisionen sind zu reduzieren/vermeiden, wegen (teurer) Handhabung von "überlaufenden" Buckets

Locality Sensitive Hashing (LSH): Idee

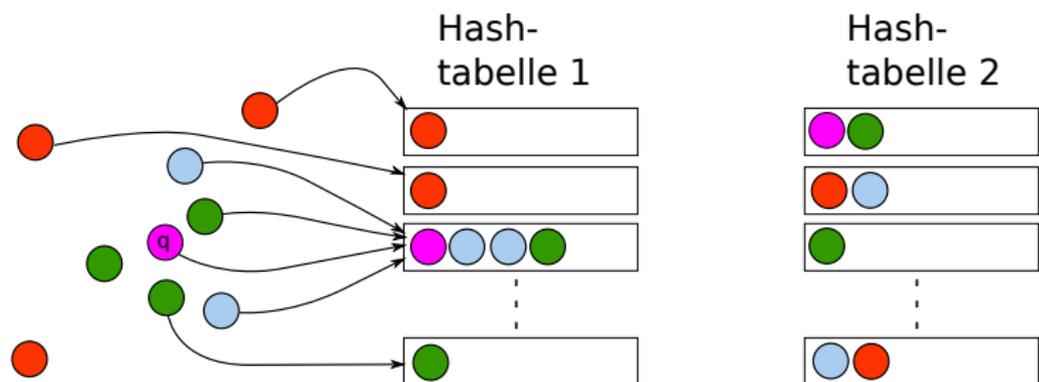
Idee:

- **Kollisionen:** ähnliche Objekte sollen(!) in den gleichen Hash-Bucket fallen.
- Für Anfrage Objekt q wird in dem Bucket in den q fällt nachgeschaut.



Locality Sensitive Hashing (LSH): Idee (2)

- Um die Wahrscheinlichkeit von Kollisionen zu erhöhen werden mehrere Hashtabellen aufgebaut.

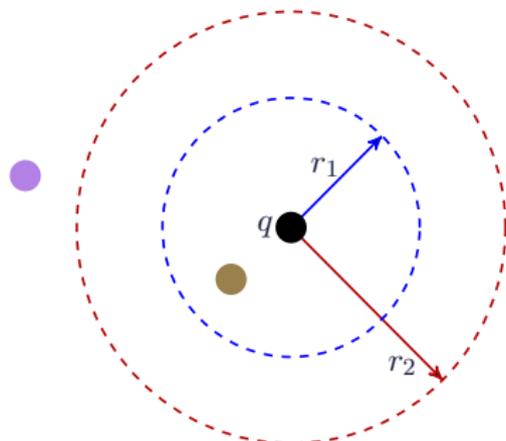


Was bedeutet es Locality Sensitive zu sein?

Eine Familie von Hashfunktionen $H = \{h : S \rightarrow U\}$ heißt

(r_1, r_2, p_1, p_2) -sensitive falls die folgenden beiden Bedingungen für beliebige Punkte $\mathbf{q}, \mathbf{v} \in S$ gelten:

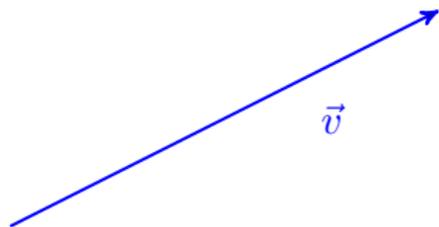
- if $dist(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \leq r_1$ dann $Pr_H(h(\mathbf{q}) = h(\mathbf{v})) \geq p_1$
- if $dist(\mathbf{q}, \mathbf{v}) > r_2$ dann $Pr_H(h(\mathbf{q}) = h(\mathbf{v})) \leq p_2$



Wichtig: Falls $r_1 < r_2$ und $p_1 > p_2$: ähnliche Objekte bekommen häufiger den gleichen Hash-Wert, im Vergleich zu weniger ähnlichen.

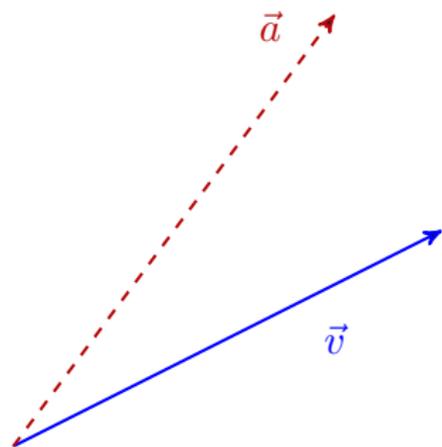
d Dimensionaler Vektorraum: Idee für Hashfunktion

- Gegeben Vektor \vec{v} im d-dimensionalen Raum.
- Wie kann man \vec{v} mit weniger als d Werten beschreiben?



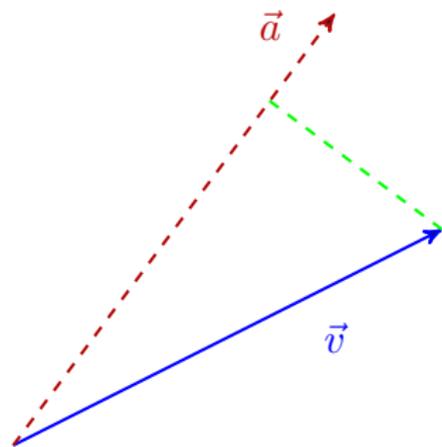
d Dimensionaler Vektorraum: Idee für Hashfunktion

- Gegeben Vektor \vec{v} im d-dimensionalen Raum.
- Wie kann man \vec{v} mit weniger als d Werten beschreiben?
- Nehme weiteren Vector \vec{a} hinzu.



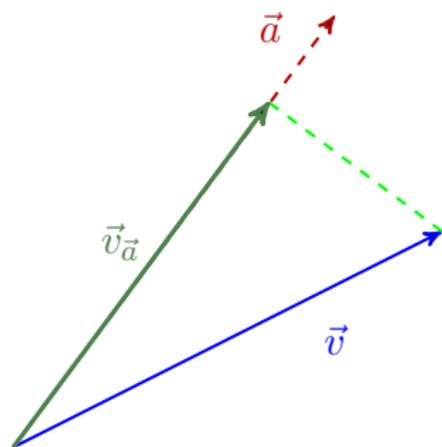
d Dimensionaler Vektorraum: Idee für Hashfunktion

- Gegeben Vektor \vec{v} im d-dimensionalen Raum.
- Wie kann man \vec{v} mit weniger als d Werten beschreiben?
- Nehme weiteren Vector \vec{a} hinzu.
- Betrachte Skalarprodukt



$$\vec{a} \cdot \vec{v}$$

d Dimensionaler Vektorraum: Idee für Hashfunktion

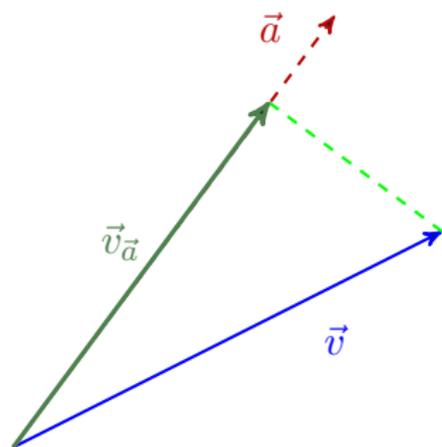


- Gegeben Vektor \vec{v} im d -dimensionalen Raum.
- Wie kann man \vec{v} mit weniger als d Werten beschreiben?
- Nehme weiteren Vector \vec{a} hinzu.
- Betrachte Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{v}$$

- Idee: ähnliche Vektoren \vec{v}_i haben ähnliche Werte $\vec{a} \cdot \vec{v}_i$

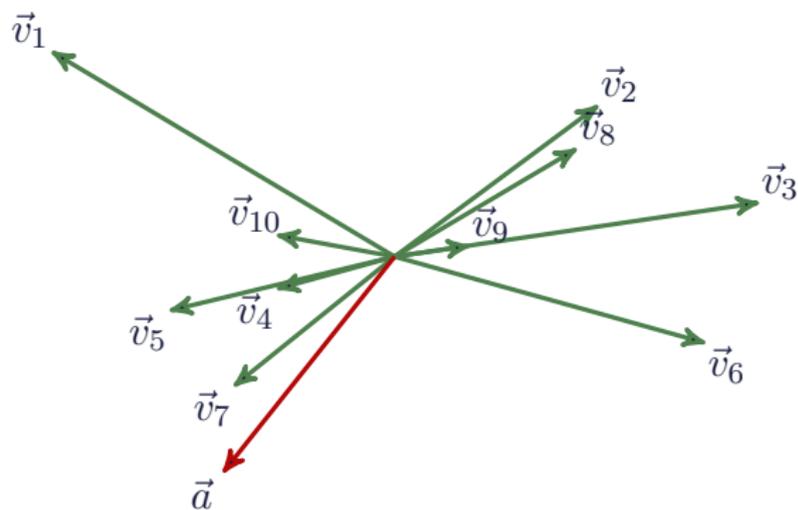
d Dimensionaler Vektorraum: Idee für Hashfunktion



- Gegeben Vektor \vec{v} im d -dimensionalen Raum.
- Wie kann man \vec{v} mit weniger als d Werten beschreiben?
- Nehme weiteren Vector \vec{a} hinzu.
- Betrachte Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{v}$$

- Idee: ähnliche Vektoren \vec{v}_i haben ähnliche Werte $\vec{a} \cdot \vec{v}_i$
Also, erste Idee für Hashfunktion: $h(\vec{v}) := \lfloor \vec{a} \cdot \vec{v}_i \rfloor$



$$\vec{v}_1 = (-2.1, -1.1)$$

$$\vec{v}_2 = (2.4, -1.0)$$

$$\vec{v}_3 = (-1.6, -0.5)$$

$$\vec{v}_4 = (-3.9, -0.9)$$

$$\vec{v}_5 = (-1.0, -0.2)$$

$$\vec{v}_6 = (-2.6, 0.0)$$

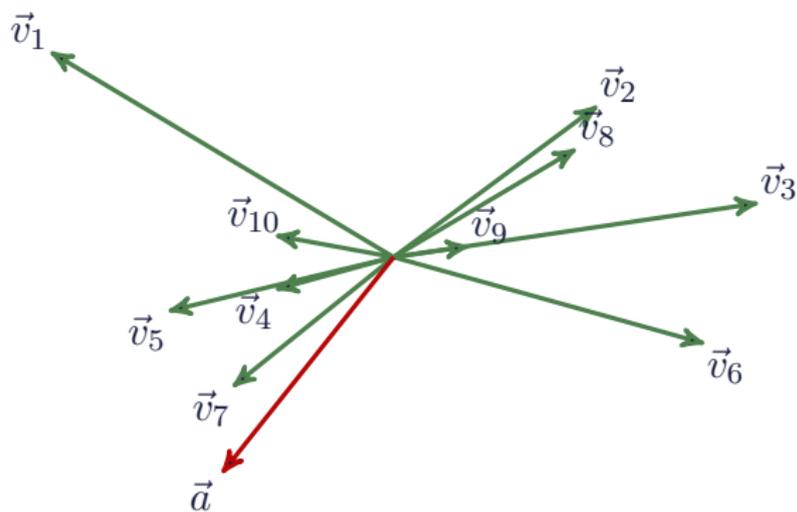
$$\vec{v}_7 = (-0.7, 1.2)$$

$$\vec{v}_8 = (1.2, -0.7)$$

$$\vec{v}_9 = (-2.6, 0.5)$$

$$\vec{v}_{10} = (-0.8, 1.1)$$

$$\vec{a} = (-1.6, -2)$$



Mit Hashfunktion

$$h(v) = \lfloor \vec{a} \cdot \vec{v} \rfloor$$

erhalten wir

$$h(\vec{v}_1) = 1$$

$$h(\vec{v}_2) = -6$$

$$h(\vec{v}_3) = -7$$

$$h(\vec{v}_4) = 2$$

$$h(\vec{v}_5) = 4$$

$$h(\vec{v}_6) = -4$$

$$h(\vec{v}_7) = 4$$

$$h(\vec{v}_8) = -5$$

$$h(\vec{v}_9) = -2$$

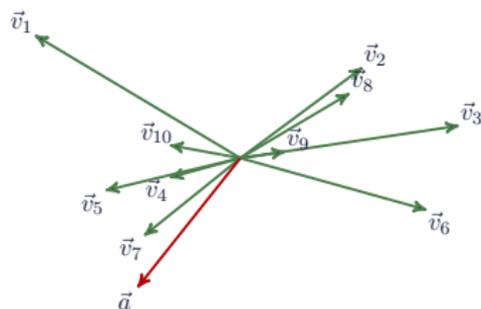
$$h(\vec{v}_{10}) = 1$$

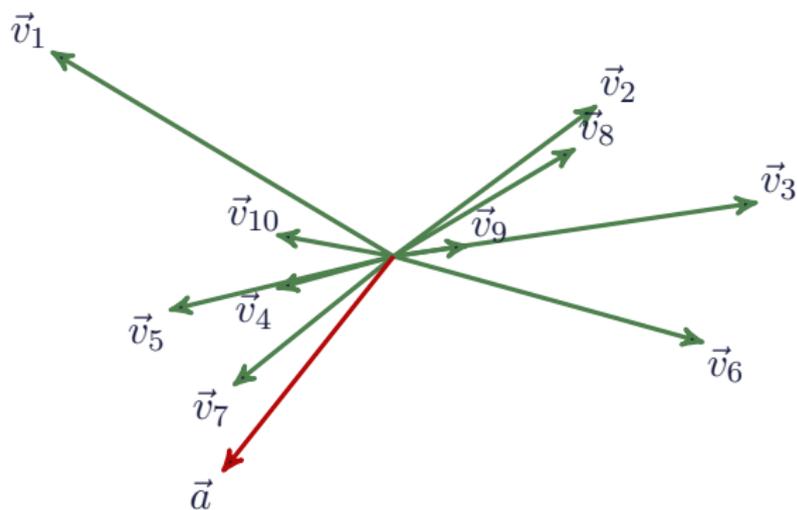
Wir interpretieren die Hashwerte als Label der Buckets, in die wir die Objekte (Vektoren) stecken....

Bucket -7	Bucket -6	Bucket -5
\vec{v}_3	\vec{v}_2	\vec{v}_8
Bucket -4	Bucket -3	Bucket -2
\vec{v}_6		\vec{v}_9
Bucket -1	Bucket 0	Bucket 1
		\vec{v}_1 \vec{v}_{10}
Bucket 2	Bucket 3	Bucket 4
\vec{v}_4		\vec{v}_5 \vec{v}_7
Bucket 5	Bucket 6	Bucket 7

Kaum Kollisionen, viele leere Buckets. Was können wir tun?

$$\begin{aligned}
 h(\vec{v}_1) &= 1 \\
 h(\vec{v}_2) &= -6 \\
 h(\vec{v}_3) &= -7 \\
 h(\vec{v}_4) &= 2 \\
 h(\vec{v}_5) &= 4 \\
 h(\vec{v}_6) &= -4 \\
 h(\vec{v}_7) &= 4 \\
 h(\vec{v}_8) &= -5 \\
 h(\vec{v}_9) &= -2 \\
 h(\vec{v}_{10}) &= 1
 \end{aligned}$$





Betrachte nun
Hashfunktion

$$h(v) = \lfloor \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{2} \rfloor$$

$$h(\vec{v}_1) = 0$$

$$h(\vec{v}_2) = -3$$

$$h(\vec{v}_3) = -4$$

$$h(\vec{v}_4) = 1$$

$$h(\vec{v}_5) = 2$$

$$h(\vec{v}_6) = -2$$

$$h(\vec{v}_7) = 2$$

$$h(\vec{v}_8) = -3$$

$$h(\vec{v}_9) = -1$$

$$h(\vec{v}_{10}) = 0$$

Bucket -4	Bucket -3	Bucket -2
\vec{v}_3	\vec{v}_2 \vec{v}_8	\vec{v}_6
Bucket -1	Bucket 0	Bucket 1
\vec{v}_9	\vec{v}_1 \vec{v}_{10}	\vec{v}_4
Bucket 2	Bucket 3	Bucket 4
\vec{v}_5 \vec{v}_7		

Hashwerte:

$$h(\vec{v}_1) = 0$$

$$h(\vec{v}_2) = -3$$

$$h(\vec{v}_3) = -4$$

$$h(\vec{v}_4) = 1$$

$$h(\vec{v}_5) = 2$$

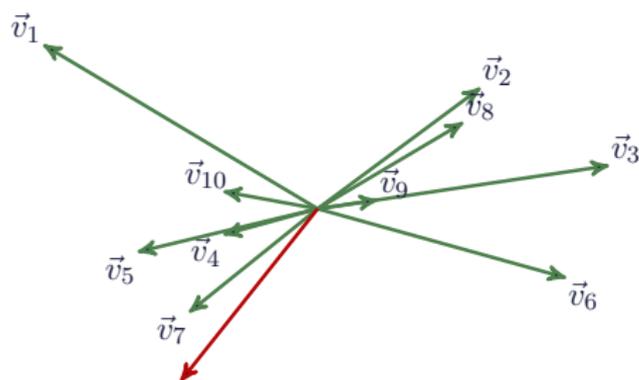
$$h(\vec{v}_6) = -2$$

$$h(\vec{v}_7) = 2$$

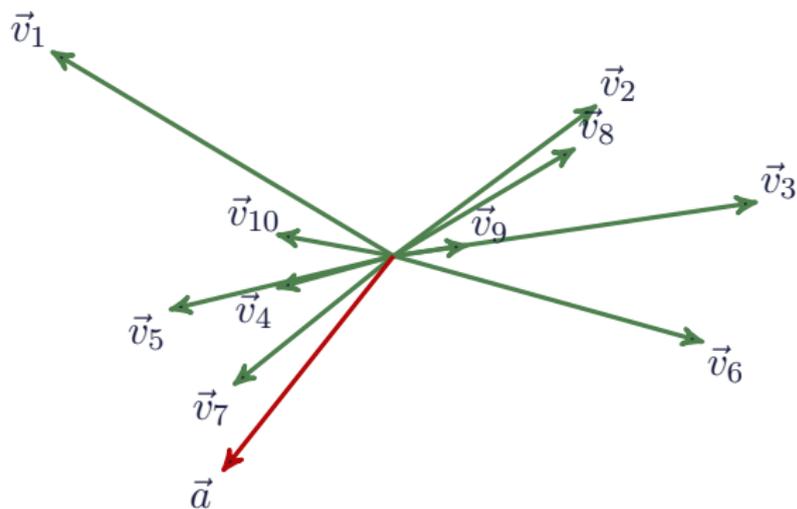
$$h(\vec{v}_8) = -3$$

$$h(\vec{v}_9) = -1$$

$$h(\vec{v}_{10}) = 0$$



Wir sehen den Effekt: Weniger Buckets, mehr Kollisionen.



Mit Hashfunktion

$$h(v) = \lfloor \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{4} \rfloor$$

$$h(\vec{v}_1) = 0$$

$$h(\vec{v}_2) = -2$$

$$h(\vec{v}_3) = -2$$

$$h(\vec{v}_4) = 0$$

$$h(\vec{v}_5) = 1$$

$$h(\vec{v}_6) = -1$$

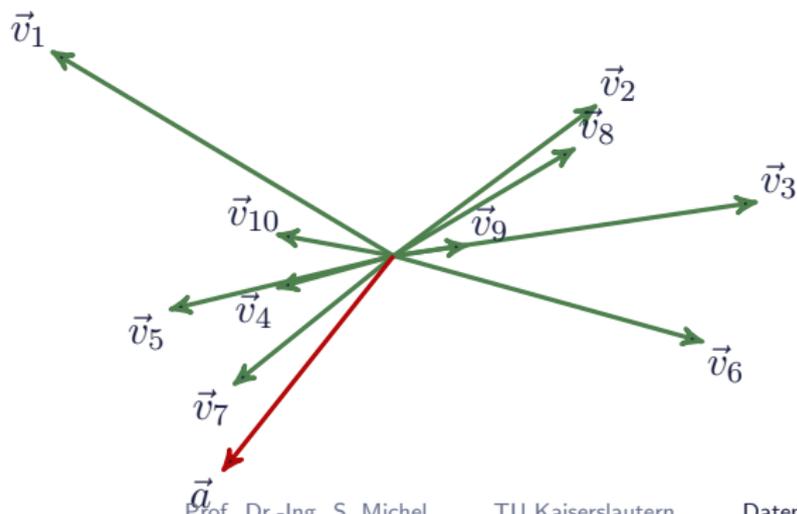
$$h(\vec{v}_7) = 1$$

$$h(\vec{v}_8) = -2$$

$$h(\vec{v}_9) = -1$$

$$h(\vec{v}_{10}) = 0$$

Bucket -2	Bucket -1	Bucket 0
\vec{v}_2	\vec{v}_6	\vec{v}_1
\vec{v}_3	\vec{v}_9	\vec{v}_4
\vec{v}_8		\vec{v}_{10}
Bucket 1	Bucket 2	
\vec{v}_5		
\vec{v}_7		



Hashwerte:

$$h(\vec{v}_1) = 0$$

$$h(\vec{v}_2) = -2$$

$$h(\vec{v}_3) = -2$$

$$h(\vec{v}_4) = 0$$

$$h(\vec{v}_5) = 1$$

$$h(\vec{v}_6) = -1$$

$$h(\vec{v}_7) = 1$$

$$h(\vec{v}_8) = -2$$

$$h(\vec{v}_9) = -1$$

$$h(\vec{v}_{10}) = 0$$

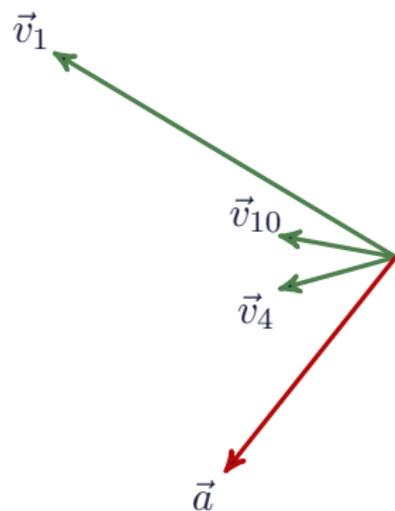
Anfrage: Finde
Nachbarn von \vec{v}_8 .

Vorgehensweise:
Schau in Bucket mit
Label -2 ($= h(\vec{v}_8)$).
Finde zwei Objekte.
Evaluere diese.

Beobachtung: \vec{v}_{10} , \vec{v}_4 und \vec{v}_1 fallen in einen Bucket. Ok, \vec{v}_1 und \vec{v}_4 sind in der Tat ähnlich, aber \vec{v}_{10} passt nicht gut.

- **Wo ist das Problem?**

Vektor \vec{a} ist nicht in der Lage gut zwischen diesen drei Vektoren zu unterscheiden.



Bucket 0
\vec{v}_1
\vec{v}_4
\vec{v}_{10}

Beobachtung: \vec{v}_{10} , \vec{v}_4 und \vec{v}_1 fallen in einen Bucket. Ok, \vec{v}_1 und \vec{v}_4 sind in der Tat ähnlich, aber \vec{v}_{10} passt nicht gut.

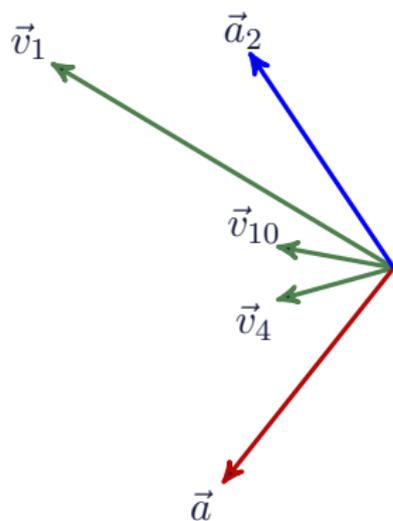
- **Wo ist das Problem?**

Vektor \vec{a} ist nicht in der Lage gut zwischen diesen drei Vektoren zu unterscheiden.

- **Lösung:** Wir nehmen einen zweiten Vektor \vec{a}_2 hinzu.

$$h_{a_2}(\vec{v}) := \lfloor \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}}{4} \rfloor$$

Mit $h_{a_2}(\vec{v}_{10}) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_4) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_1) = 2$



Beobachtung: \vec{v}_{10} , \vec{v}_4 und \vec{v}_1 fallen in einen Bucket. Ok, \vec{v}_1 und \vec{v}_4 sind in der Tat ähnlich, aber \vec{v}_{10} passt nicht gut.

- **Wo ist das Problem?**

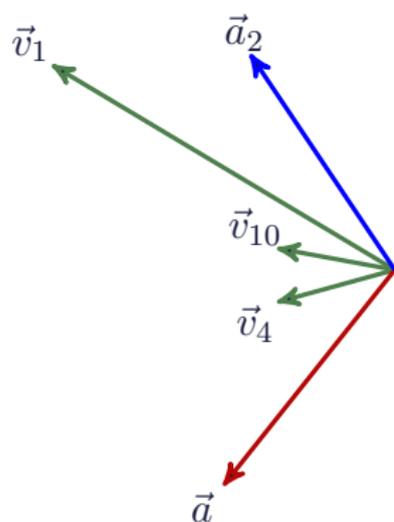
Vektor \vec{a} ist nicht in der Lage gut zwischen diesen drei Vektoren zu unterscheiden.

- **Lösung:** Wir nehmen einen zweiten Vektor \vec{a}_2 hinzu.

$$h_{a_2}(\vec{v}) := \lfloor \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}}{4} \rfloor$$

Mit $h_{a_2}(\vec{v}_{10}) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_4) = 0$, $h_{a_2}(\vec{v}_1) = 2$

- Wie sehen dann die Labels der Buckets aus?
Konkatenation der einzelnen Hashwerte.
- Wir haben also die "Genauigkeit" der Buckets erhöht.
- Was ist der potentielle Nachteil?



Bucket	...
(0,0)	
\vec{v}_4	
\vec{v}_{10}	

Eine bekannte LSH Variante

Für jeden d -dimensionalen Punkt \vec{v} betrachten wir k unabhängige Hashfunktionen der Form:

$$h_{\vec{a},B}(\vec{v}) = \left\lfloor \frac{\vec{a} \cdot \vec{v} + B}{W} \right\rfloor$$

\vec{a} : d -dimensionaler Vektor, zufällig anhand Wahrscheinlichkeitsverteilung ausgewählt.

$W \in \mathbb{R}$, und $B \in [0, W]$. \vec{v} wird auf \vec{a} "projiziert" (Skalarprodukt).

"Beschriftung" der LSH Buckets

Mit k Hashfunktionen ist die Beschriftung des Buckets ein Integer-Vektor der Länge k :

$$g(\vec{v}) = (h_{\vec{a}_1, B_1}(\vec{v}), \dots, h_{\vec{a}_k, B_k}(\vec{v}))$$

Welchen Einfluss hat k auf die Suche?

Paper: M. Datar et al.: Locality-sensitive hashing scheme based on p-stable distributions. Symposium on Computational Geometry, 2004.

Objekte den Hash-Buckets zuweisen

LSH Bucket "Labels"

Mit k Hashfunktionen ist ein Label ein Integer-Vektor der Länge k :

$$g(\vec{v}) = (h_{a_1, B_1}(\vec{v}), \dots, h_{a_k, B_k}(\vec{v}))$$

Objekt:



Anwendung von 4 Hashfunktionen:

$$h_1(\dots) = 0$$

$$h_2(\dots) = 1$$

$$h_3(\dots) = 1$$

$$h_4(\dots) = 1$$

Ergibt das Label: $g(\dots) = (0, 1, 1, 1)$

Wie kann man das Problem adressieren, dass ähnliche Objekte in einem anderen Bucket landen und somit nicht gefunden werden?

Suche nach ähnlichen Objekten: Beispiel

		Bucket-Label
Anfrage:		0,1,0,1
Potentieller Treffer:		0,1,1,1

Nicht gefunden!

Idee: Mehrere Hashtabellen!

- Um Trefferwahrscheinlichkeit zu erhöhen werden Objekte nicht nur in einen Bucket gesteckt anhand von g indexiert, sondern anhand von verschiedenen g in mehrere Buckets in verschiedenen Hashtabellen.

Anfrageverarbeitung: Suche der K nächsten Nachbarn

Gegeben ein Anfrage-Punkt q

- Berechne Bucket-Labels $g_i(q)$ für jede Hashtabelle i .
- Hole Objekte aus diesen Buckets
- Berechne echte Distanz und ordne Objekte entsprechend

Trotzdem: LSH ist eine approximative Technik

- Keine harte Garantie, dass alle Treffer (und nur diese) gefunden werden ...
- ... das ist oftmals aber akzeptabel.
- Es gibt theoretische Ansätze die Ergebnisgüte voraus zu sagen

Mehrere Hashtabellen

Benutze mehrere Hashtabellen, um die Wahrscheinlichkeit der Kollisionen zu vergrößern

	Hashtabelle 1	Hashtabelle 2
	0,1,0,1	1,0,0,1
	0,1,1,1	1,0,0,1
Ergebnis:	Kein Treffer	Treffer!

Beobachtungen

Tuning

- Tradeoff zwischen Größe der Hash-Buckets und der Effektivität
- Mehrere Hashtabellen: Höhere Trefferwahrscheinlichkeit aber größerer Platzverbrauch
- Achtung: auch hier gilt wieder: Ab einem bestimmten Punkt kann ein Full-Scan günstiger sein (und dieser ist sogar noch exakt!)

Erweiterungen

- Schau in mehrere Hash-Buckets *per* Hashtabelle (aka. multi-probe LSH)
- Auch: verteilte Implementierungen von LSH (z.B. in Peer-to-Peer-Systemen) oder in MapReduce

Min-Hashing

- Gegeben zwei Mengen A und B von Objekten
- Zum Beispiel sind A und B Text-Dokumente mit Wörtern.
- Ein oft benutztes Ähnlichkeitsmaß ist der **Jaccard Koeffizient**:

$$J(A,B) := \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

Idee hinter Min-Hashing

- Berechne für alle Elemente einer Menge A eine Hashfunktion, die $a \in A$ einem Integer-Wert zuweist.
- Hashfunktion hat hier nichts mit LSH zu tun, es ist eine "normale".
- Betrachte den kleinsten dieser Werte $h_{min}(A)$
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Mengen A und B dieser min-Wert identisch ist?

Paper: Andrei Broder. On the resemblance and containment of documents. 1997.

Beispiel

 $S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$ $S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$ $S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$

Objekt	Hashwert
Apfel	263228505
Birne	1512322680
Tomate	2655545330
Orange	2426202636
Zitrone	4196103473
Gurke	3877529293
Kokosnuss	2846776306
Aprikose	41486361
Banane	4138599105

Beispiel

 $S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$ $S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$ $S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$

Objekt	Hashwert
Apfel	263228505
Birne	1512322680
Tomate	2655545330
Orange	2426202636
Zitrone	4196103473
Gurke	3877529293
Kokosnuss	2846776306
Aprikose	41486361
Banane	4138599105

Wir haben also

$$h_{min}(S_1) = 263228505$$

$$h_{min}(S_2) = 2426202636$$

$$h_{min}(S_3) = 41486361$$

Min-Hashing (2)

- Die Wahrscheinlichkeit $Pr[h_{min}(A) = h_{min}(B)]$ steht in direkter Verbindung zum Jaccard-Koeffizienten:

$$Pr[h_{min}(A) = h_{min}(B)] = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

Anwendung

- Suche nach ähnlichen Mengen: Betrachte nur Paare von Mengen, deren min-Wert identisch ist
- Bzw., nehme $Pr[h_{min}(A) = h_{min}(B)]$ als Näherung für den Jaccard-Koeffizienten
- Wie gut funktioniert das?

Beispiel

$$S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$$

$$S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$$

$$S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$$

Objekt	Hashwert
Apfel	263228505
Birne	1512322680
Tomate	2655545330
Orange	2426202636
Zitrone	4196103473
Gurke	3877529293
Kokosnuss	2846776306
Aprikose	41486361
Banane	4138599105

Wir haben also

$$h_{min}(S_1) = 263228505$$

$$h_{min}(S_2) = 2426202636$$

$$h_{min}(S_3) = 41486361$$

Die Min-Werte sind für alle drei Mengen unterschiedlich. D.h. wir bekommen eine **Schätzung von 0** für den Jaccard-Koeffizienten, obwohl dieser für S_1 S_2 nicht 0 ist.

Beispiel: Nehmen nun zweite Hashfunktion hinzu

 $S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$ $S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$ $S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$

Objekt	Hashwert 1	Hashwert 2
Apfel	263228505	3747123490
Birne	1512322680	2691314150
Tomate	2655545330	618073562
Orange	2426202636	167471787
Zitrone	4196103473	3040259855
Gurke	3877529293	2452364051
Kokosnuss	2846776306	2613259214
Aprikose	41486361	2319295075
Banane	4138599105	765635320

Beispiel: Nehmen nun zweite Hashfunktion hinzu

$$S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$$

$$S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$$

$$S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$$

Objekt	Hashwert 1	Hashwert 2	Wir haben also
Apfel	263228505	3747123490	$h1_{min}(S_1) = 263228505$
Birne	1512322680	2691314150	$h1_{min}(S_2) = 2426202636$
Tomate	2655545330	618073562	$h1_{min}(S_3) = 41486361$
Orange	2426202636	167471787	$h2_{min}(S_1) = 167471787$
Zitrone	4196103473	3040259855	$h2_{min}(S_2) = 167471787$
Gurke	3877529293	2452364051	$h2_{min}(S_3) = 765635320$
Kokosnuss	2846776306	2613259214	
Aprikose	41486361	2319295075	
Banane	4138599105	765635320	

Beispiel 2 ...

 $S_1 = \{\text{Apfel, Birne, Tomate, Orange}\}$
 $S_2 = \{\text{Tomate, Zitrone, Orange, Gurke}\}$
 $S_3 = \{\text{Kokosnuss, Aprikose, Banane}\}$

$$h1_{min}(S_1) = 263228505$$

$$h1_{min}(S_2) = 2426202636$$

$$h1_{min}(S_3) = 41486361$$

$$h2_{min}(S_1) = 167471787$$

$$h2_{min}(S_2) = 167471787$$

$$h2_{min}(S_3) = 765635320$$

	Schätzung	Echt
$J(S_1, S_2)$	1/2	2/6
$J(S_2, S_3)$	0	0
$J(S_1, S_3)$	0	0

Min-Hashing - Mehrere min-Werte bzw. Hashfunktionen

Mehrere (k) Hash-Funktionen mit je einem min-Wert

- Betrachte k (unabhängige) Hashfunktionen, die jeweils einen min-Wert liefern.
- Approximiere $J(A,B)$ mit Anteil der übereinstimmenden min-Werte.
- Wie im Beispiel zuvor.

Mehrere (k) min-Werte & eine Hashfunktionen

- Betrachte nur eine Hashfunktion, aber nehme von dieser die k kleinsten Werte.

Der Fehler ist bei beiden Schemata $O(1/\sqrt{k})$.